Лекция 9. Толқынды түрлендіру және инверсия формуласы

Вейвлеттер типі. Вейвлеттің орташа жилігі. вейвлет-түрлендірудің үзіліссідіккасиеті. вейвлет-түрлендірут бойынша функцияларды калпына келтіру формуласы.

Фурье түрлндрудің унитарлық қасиетін дәлелдейік:

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$$

Дәлелдеу.

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi\overline{g}(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\hat{f}(\xi)\int_{-\infty}^{\infty}\overline{g}(x)e^{i\xi x}dx =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\overline{\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-i\xi x}dx}d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle.$$

Вейвлеттің Фурье түрлндруің карастырайық:

$\psi^{a,b}$ -ні $\psi(a\xi)$ арқылы әрнектейміз.

$\psi^{a,b} = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ Фурье түрлндрудің масштабтау қасиетін ескере отырып

$F(f(at))=1/a\ Ff(\xi/a)$ келесі өрнекті аламыз:

$F\left(\frac{a}{\sqrt{a}}\frac{1}{a}\psi\left(\frac{t}{a}\right)\right)=\sqrt{a}\psi(at)$. Енді ығысудың Фурье түрлендіруінің қасиеін қолданамыз

$$F\psi^{a,b}=e^{-ib\xi}F\psi^{a,0}$$

Дәлелдеу.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(a(t-b))\exp(-i\xi t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(at')\exp(-i\xi(t'+b))dt'=$$

$$=\exp(-ib\xi)\int_{-\infty}^{\infty}\psi(at')\exp(-i\xi t')dt'=\exp(-ib\xi)\hat{\psi}(at)$$

Теорема. Кез келген $L_2(R)$ жататын f,g функциялар үшін келесі теңдік орындалады:

$$\frac{C_\psi}{2\pi}\langle f,g\rangle=\langle T^b f,T^b g\rangle,\ \text{где}\ C_\psi=2\pi\int\frac{|\psi(\xi)|^2}{|\xi|}d\xi<\infty.$$

Дәлелдеу.

Скаляр кобейтіндіні ашамыз:

(здесь мы распространили интеграл по а четным образом на всю числовую прямую)

$\left\langle T^b f, T^b g \right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dadb}{|a|^2} \left(T^b f\right)_{a,b} \overline{\left(T^b g\right)_{a,b}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dadb}{|a|^2} .... =$, где мы должны подставить под интеграл функции

$\left(T^b f\right)_{a,b} = \left\langle f, \psi^{a,b} \right\rangle =$ в силу унитарности преобразования Фурье $= \frac{1}{2\pi} \left\langle \hat{f}, g \right\rangle =$

$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \sqrt{|a|} e^{-ib\xi} \psi(a\xi) d\xi$, ж н $\left(T^b f\right)_{a,b}$. шші

$\left\langle T^b f, T^b g \right\rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dadb}{|a|^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \sqrt{|a|} e^{-ib\xi} \overline{\psi}(a,\xi) d\xi \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}}(\xi) \sqrt{|a|} e^{ib\xi} \psi(a,\xi) d\xi =$

$= \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{|a|^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} db \hat{F}(b) \overline{\hat{G}}(b) =$ Фурье тт тт тт унитарлы н аасиетбойныша $=$

$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{|a|^2} \left\langle F(b), G(b) \right\rangle$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{da}{|a|^2}\int_{-\infty}^{\infty} db\,|a|^{1/2}\hat{f}(b)\overline{\hat{\psi}}(ab)\overline{|a|}^{1/2}\overline{\hat{g}}(b)\hat{\psi}(ab) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{da}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} db\,\hat{f}(b)\overline{\hat{g}}(b)\,|\hat{\psi}(ab)|^2 = \text{интегралдау ретін ауыстырамыз} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} db\,\hat{f}(b)\overline{\hat{g}}(b)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{da}{|a|}\,|\hat{\psi}(ab)|^2 =$$

қосымша аралық түрлендіруді қолданайық:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{da}{|a|}\,|\hat{\psi}(ab)|^2 = \left|\begin{matrix} ab = s \\ ds = b\,da \end{matrix}\right| = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{|s|}\,|\hat{\psi}(s)|^2 = \frac{C_\psi}{2\pi},$$

жалғастыра келе:

$$= \frac{1}{4\pi^2}C_\psi\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\,\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}}(\xi) = \frac{C_\psi}{2\pi}\langle f, g\rangle.$$

Келесі формула Фурье түрлендірудің кері формуласының аналогы – вейвлет – түрлендірудің кері формуласы:

$$f(x) = \frac{2\pi}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty}\int \frac{dadb}{a^2} \left(T^b f\right)(a,b) \cdot \psi^{a,b}(x) \qquad (1)$$

Бұл жерде $0<C\psi<\infty$, $\psi \in L_2(R)$, $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0$

Кері формуланың жалпыландыруы:

$\psi1(t)$, $\psi2(t)$ –вейвлеттердің екі түрі болсын. Бір түрі бойынша түрлендіру берілсін:

$Tbf = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_1^{a,b}(x)dx$, бірқ, кері формуланы басқа түрі бойынша алайық:

$$f(x) = \frac{2\pi}{C_{\psi 1\psi 2}} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dadb}{a^2}\left(T^b f\right)\psi_2^{a,b}(x)$$

Дәлелдеі алдыңғы теоремадай, бірақ, C_ψ –ді $C_{\psi1\psi2}$, алмастыруы қажет

$$C_{\psi 1\psi 2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}_1(\xi)\hat{\psi}_2(\xi)|}{|\xi|} d\xi .$$

Егер келесі шарттар орындалса: $\psi_1(t), \psi_2(t) \in L_1(R), \exists \psi_2'(t) \in L_2(R), t\psi_2(t) \in L_1(R)$,
Және $\hat{\psi}_1(0) = \hat{\psi}_2(0) = 0$, $f(x) \in L_2(R)$ шектеул3 болса , онда кері формула f- функциянын әр үздісіздік нүктедесінде орындалады:

$$f(x) = \frac{2\pi}{C_\psi} \lim_{\substack{A1\to 0 \\ A2\to\infty}} \int_{A1\le|a|\le A2} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} db \left\langle f, \psi_1^{a,b} \right\rangle \cdot \psi_2^{a,b}$$

Бұл жердегі интегралдар басты мәндер мағанасында алынады